

Tallinna Reaalkool

Valgete kääbuste kokkupõrke simuleerimine kuubistiku meetodil –
stabiilsusanalüüs difusioonikonstantide ja resolutsioonide varieerimise
abil
Uurimistöö

Kristjan Kongas

11. A

Juhendajad: Jaan Kalda, Mart Kuurme

Tallinn 2015

Sisukord

Sissejuhatus.....	4
1 Üldrelatiivsus ja simulatsioonialgoritm.....	6
1.1 Üldrelatiivsuse matemaatiline ja füüsikaline olemus.....	6
1.1.1 Ühikud.....	6
1.1.2 Aegruum ja sündmused.....	6
1.1.3 Nelivektorid ja -tensorid.....	6
1.1.4 Tensori komponentide esitamine.....	6
1.1.5 Einsteini summeerimisreegel.....	7
1.1.6 Nelivektori pikkus.....	7
1.1.7 Meetriline tensor.....	7
1.1.8 Christoffeli sümbol.....	8
1.1.9 Nelikiirus ja pinge-energia tensor.....	8
1.1.10 Järvusseadus.....	9
1.2 Simuleerimisalgoritmi kirjeldus.....	9
1.2.1 Välja modelleerimine kuubistiku abil.....	10
1.2.2 Diferentsiaalvõrrandite lahendamine.....	10
1.3 Lähtevõrrandite lahendamine.....	11
1.3.1 Fermi gaasi tiheduse ja rõhu vaheline seos.....	11
1.3.2 Olekuvõrrandi lahendamine.....	11
1.4 Simulatsiooni diferentsiaalvõrrandid.....	13
1.4.1 Gaasi impulsi- ja masstiheduse diferentsiaalvõrrand.....	13
1.4.2 Meetrilise tensori diferentsiaalvõrrand.....	13
1.5 Tähe statsionaarse oleku diferentsiaalvõrrandid.....	13
1.6 Ääritingimused.....	14
2 Simuleerimine ja andmete analüüs.....	16
2.1 Stabiliseerimismeetod.....	16
2.2 Katsete tehnilised andmed.....	16
2.3 Algtingimused.....	17
2.3.1 Tähe tihedusprofiil.....	17
2.3.2 Algne tähtede paigutus.....	18
2.4 Põrkefaaside klassifikatsioon.....	19
2.4.1 Esimene faas.....	19
2.4.2 Teine faas.....	20
2.4.3 Kolmas faas.....	21
2.5 Ebastabiilsusnähtuste klassifitseerimine raskusastme järgi.....	22
2.5.1 Ebafüüsikalised nähtused.....	22
2.5.2 Programmi kokkujooksmine.....	23
2.6 Resolutsioonide stabiilsusvõrdlus.....	24
2.6.1 Simulatsiooni õnnestumise ja ebafüüsikaliste nähtuste esinemise vahelise piirjuhtumi leidmine.....	24
2.6.2 Kokkujooksmise hetke ja difusioonikonstandi vaheline seos.....	25
Kokkuvõte.....	27
Kasutatud kirjandus.....	28
Lisa 1 Pildiseeriad simulatsioonidest.....	30

Resümee.....	40
Abstract: Simulation of the collision of binary white dwarfs using a cubic grid – stability analysis by variation of diffusion constant and resolution.....	41

Sissejuhatus

Newtoni mehhaanika järgi saavad kaks massiivset keha igavesti türelda elliptilistel orbiitidel ümber ühise massikeskme. Samas üldrelatiivsusteooria ennustab, et kiirendusega liikuvad kehad kiirgavad gravitatsioonilisi laineid, mis kannavad energiat. Mida massiivsem on keha ja mida suurem on kiirendus, seda tugevam on kiirgus. Kaksiktähtede süsteemis tuleb see energia gravitatsioonilisest potentsiaalsest energiast ja seega hakkavad tähed üksteisele tasapisi lähenema, kuni need lõpuks põrkuvad.

Sellise lähenemisprotsessi algfaas, kus tähed on veel üksteisest kaugel, on analüütiliselt ära lahendatud ja seega hästi teada. Samas lõppfaasi, tähtede ühinemise täpne dünaamika on äärmiselt keeruline ning selle kohta on võimalik informatsiooni saada näiteks arvutiga simuleerimise abil. Lõppfaas pakub suurt huvi, sest just siis kiiratakse kõige intensiivsemalt gravitatsioonilisi laineid, mida üritatakse jätkuvalt eksperimentaalselt tuvastada.

Käesoleva töö eesmärk on uurida kuubistiku meetodil töötava vastava simulatsiooni stabiilsust. Uuritakse, kuidas sõltub stabiilsus simulatsiooni resolutsioonist ja tehiskult lisatud stabilisaatorist – difusioonikonstandist. Mida suurem on difusioonikonstant, seda stabiilsem üldiselt simulatsioon on, aga samas muudab see ka simulatsiooni ebatäpsemaks. Seega on eesmärk leida minimaalse vajaliku difusioonikonstandi sõltuvuse resolutsioonist, nii et simulatsioon püsib veel stabiilne.

Uurimistöö jaoks on autor programmeerinud relativistliku arvutisimulaatori, mis simuleerib kaksiktähtedes sisalduva gaasi- ja gravitatsioonivälja dünaamikat. Et valgete kääbuste tekitatav gravitatsiooniline potentsiaal on palju nõrgem mustade aukude tekitatavast potentsiaalist, kasutatakse simulatsioonis lineariseeritud gravitatsiooni – üldrelatiivsuse ligikaudset lähendust, mis töötab nõrkade gravitatsioonivälja korral. Gaasi simuleeritakse Fermi gaasi mudeli järgi. Simulaatorile tuleb ette anda esialgse gaasi massi- ja impulsi- ja tiheduse paigutuse ning simulaator arvutab selle põhjal, kuidas tihedus-, kiirus- ja gravitatsioonivälja ajas muutub. Simulatsioon ei arvesta tähtede tekitatud

elektromagnetväljaga.

Varasemates töödes on simuleeritud tähtede ja ka mustade aukude kokkupõrget, ent on ebatõenäoline, et on uuritud vastavate simulatsioonide stabiilsuse sõltuvust difusioonikonstandist.

Täna uurimistöö juhendajaid Jaan Kaldat ja Mart Kuurmet, kelle nõu oli mõneski küsimuses abiks.

1 Üldrelatiivsus ja simulatsioonialgoritm

1.1 Üldrelatiivsuse matemaatiline ja füüsikaline olemus

1.1.1 Ühikud

Käesolevas töös on kõik füüsikalised suurused esitatud ühikutes, milles valguse kiirus c on võrdne ühega. Seega pole vastavat tähist võrrandisse jäetud, kui tegemist on kordajaga.

1.1.2 Aegruum ja sündmused

Sündmus on punkt aegruumis, mis on määratud selle toimumise hetke ja asukohaga ruumis. Seega saab sündmuse määrata nelja koordinaadiga: kolme ruumikoordinaadiga ja ühe ajakoordinaadiga. Sündmuste toimumise aeg ja koht võib sõltuda valitud taustsüsteemist. Taustsüsteeme saab erirelatiivsuses vahetada Lorentzi teisenduse abil. (Katz 1964: 29)

1.1.3 Nelivektorid ja -tensorid

Kolme dimensiooniga ruumis on vektoritel 3 komponenti. Aegruumis kasutatakse analoogselt nelja komponendiga vektoreid – nelivektoreid, kus esimene komponent on ajakomponent. Näiteks saab erirelatiivsuses aegruumi punkti asukohta esitada nelivektorina - $X = (t, x, y, z)$. Vektorid on esimest järku tensorid. Teist järku tensoreid saab esitada maatrikskujul. Üldjuhul saab n . järku tensorit esitada n -dimensionaalse tabelina. (Wolfram MathWorld 2015 s. v. Tensor)

1.1.4 Tensori komponentide esitamine

Matemaatilistes teisendustes esitatakse tensorite komponente ala- ja ülaindeksite abil. Näiteks eelmises punktis mainitud asukoha vektori komponente saab esitada kujul X^0 , X^1 , X^2 ja

X^3 , kus nullis komponent on aja- ja ülejäänud on ruumikomponendid: x-, y- ja z-komponendid. Üldiselt esitatakse n -järku tensori mingit komponenti tensori tähise ja n alavõi ülaindeksiga. Kui mingi tensorvõrdus kehtib kõigi väärtuste korral nullist kolmeni, saab asendada arvud tähistega. (Wolfram MathWorld 2015 s. v. Tensor) Näiteks $A_v^\mu = B_v^\mu + C_v^\mu$ kujutab endast 16 võrrandist koosnevat võrrandsüsteemi, kus igas võrrandis on μ ja ν vastavalt asendatud täisarvudega nullist kolmeni. Üla- ja alaindeksite erinevusest arusaamine pole tööst arusaamise seisukohast tähtis, kuigi neid kasutatakse korrektselt. Töös ei kasutata tensorarvutusi ja astendamist samas võrrandis korraga, et vältida võimalikku mitmetimõistetavust.

1.1.5 Einsteini summeerimisreegel

Kui tensorite komponente korrutades on sama tähist kasutatud kaks korda, kord üla- ja kord alaindeksina (või kaks korda sama tüüpi indeksi, kus ühel korral kahest on tensor nimetajas), tähendab see avaldis summat, kus vastav indeks muutub nullist kolmeni (Einstein 1916: 161-162). Näiteks

$$S = A_\mu B^\mu = \sum_{\mu=0}^3 A_\mu B^\mu = A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3$$

annab vastuseks skalaari, aga avaldises $T_\mu^\nu = A_\mu B^\nu$ ei summeerita vastavaid liikmeid ning vastuseks saadakse teist järku tensori, sest kasutatakse erinevaid tähiseid.

1.1.6 Nelivektori pikkus

Nelivektorite pikkuse ruudu saab defineerida kui skalaarkorrutise iseendaga. Kahe vektori A ja B skalaarkorrutis erirelatiivsuses, gravitatsiooniväljade puudumisel, on defineeritud kui $S = -A^0 B^0 + A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3$. See skalaarkorrutis ei sõltu taustsüsteemi valikust. Korrutades vektori iseendaga on tulemuseks vektori pikkuse ruut. (Errede, 2008) Vektori pikkuse ruut võib olla nii negatiivne kui ka positiivne.

1.1.7 Meetriline tensor

Teine võimalus skalaarkorrutise defineerimiseks on meetrilise tensori $g_{\mu\nu}$ abil

$$S = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$$

kus summeerimine on viimast korda välja kirjutatud (ibid.).

Erirelatiivsuses, ehk gravitatsiooniväljade puudumisel, kehtib $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, kusjuures

$$\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Carroll)

Kui asendada tensori väärtused sisse, on lihtne kontrollida, et erirelatiivsuses

$$S = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = -A^0 B^0 + A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3$$

Üldrelatiivsuses võib meetriline tensor võtta teistsuguse kuju, ent kuna uurimistöös käsitletakse vaid nõrku gravitatsioonivälju, on meetrilise tensori kuju eelnäidatuga sarnane. Seetõttu jagatakse meetriline tensor kaheks osaks: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, kus $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Eelnev valem skalaarkorrutise jaoks $\eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$ pole enam täpne, ent annab siiski ligikaudselt õige vastuse. (ibid.)

1.1.8 Christoffeli sümbol

Võrrandite lihtsustamiseks on defineeritud Christoffeli sümbol

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\kappa\mu} \left(\frac{\partial g^{\alpha\kappa}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g^{\beta\kappa}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^\kappa} \right)$$

kus operaator $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ tähistab osatuletist vektori komponendi x^α suunas (March, Stanway 2012: 37).

1.1.9 Nelikiirus ja pingenergia tensor

Nelikiirus näitab, kui kiiresti liigub keha aegruumis keha omaajaga võrreldes. Matemaatiliselt

$$u^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau}$$

kus X on asukoha nelivektor.

Relativistlik pingenergia tensor $T^{\mu\nu}$ näitab mingis konkreetses aegruumi punktis massi- ja impulsihelist ning mehhaaniliste pingete tugevust laboratoorses taustsüsteemis. Naturaalsetes ühikutes saab selle kirja panna järgnevalt

$$T = \begin{pmatrix} E & p^x & p^y & p^z \\ p^x & P^{xx} & P^{xy} & P^{xz} \\ p^y & P^{yx} & P^{yy} & P^{yz} \\ p^z & P^{zx} & P^{zy} & P^{zz} \end{pmatrix}$$

kus E on mass-energia tihedus, p^i on impulsi tihedus vastavas suunas ja P^{ij} on mehhaanilise pinge komponendid. Pinge komponentidest tähistavad rõhkusid vastavates suundades P^{xx} , P^{yy} ja P^{zz} , ülejäänud kuus komponenti on külgpinged. (March, Stanway 2012: 25)

Ideaalse viskoosuseteta voolise pinge-energia tensori saab esitada kujul $T^{\alpha\beta} = (\rho + p)u^\alpha u^\beta + p g^{\alpha\beta}$, kus ρ ja p tähistavad vastavalt voolise tihedust ja rõhku voolise erirelativistlikus taustsüsteemis (Hirata 2011). Valides taustsüsteemi, kus aine on paigal, omandab nelikiirus kuju $u = (1, 0, 0, 0)$. Samuti kehtib $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$, ehk $T^{\alpha\beta} = (\rho + p)u^\alpha u^\beta + p \eta^{\alpha\beta}$. Kui $\alpha = \beta = 0$, siis $T^{00} = \rho + p - p = \rho$, ehk vastav komponent tuleb tõepoolest masstihedus. Kui $\alpha \neq 0$ või $\beta \neq 0$, siis on esimene liige null. Kui lisaks $\alpha = \beta$, siis $T^{\alpha\alpha} = p \eta^{\alpha\alpha} = p$, ehk ka voolise rõhk tuleb õige. Kui $\alpha \neq \beta$, siis on ka teine liige null, ehk $T^{\alpha\beta} = 0$. See tähendab, et voolises tõepoolest puuduvad impulsi tihedus ja külgpinged.

1.1.10 Jäätusseadus

Relatiivsuses kehtib jäätusseadus $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Nablaoperaatori saab välja kirjutada 2-järku tensorite jaoks järgnevalt (Baumann: 20)

$$0 = \nabla_\mu T^{\mu\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda}$$

1.2 Simuleerimisalgoritmi kirjeldus

Einsteini välja võrrandite täpseks lahendamiseks nimetatakse aegruumi, milles iga punkt rahuldab vastavaid välja diferentsiaalvõrrandeid. Käesolevas uurimistöös leitakse ligikaudseid lahendeid arvuti abiga. Simulaatorile on ette antud algtingimused – algne massi- ja impulsi tiheduse jaotus. Seejärel arvutab simulaator, kuidas aegruum ning massi- ja impulsi tihedus edasi arenevad (edaspidi parameetrid).

1.2.1 Välja modelleerimine kuubistiku abil

Et aegruumi parameetreid simuleerida, on asendatud ruumi lõpmatu punktihulk lõplikuga. Sel juhul on kõigi punktide simuleerimiseks vajalik vaid lõplik arvutusressurss.

Simuleeritava punktihulga iga punkt asub lõpliku kuubistiku kuubikese keskmes. Selleks, et arvutada, kuidas parameetrid punktides ajas muutuvad, on tuletatud diferentsiaalvõrrandid, mis seovad parameetrite muutumist ajas selle punkti ja selle naaberpunktide hetkväärtustega.

Simulatsioonis esinevate parameetrite diferentsiaalvõrrandid sisaldavad ka nende parameetrite esimesi ja teisi osatuletisi ruumikoordinaadi järgi. Parameetri mingis suunas esimest järku osatuletise leidmiseks vaadeldakse samas sihis asuvates naaberkuupides olevaid punkte. Seejärel kasutatakse lineaarset lähendust – lahutatakse naaberpunktide parameetrite väärtused ja jagatakse nende vahemaaga. Teist järku osatuletiste leidmiseks kasutatakse sarnast meetodit – leitakse ruutfunktsioon, mis annaks algsel punktil ja selle kahel naabril õige parameetri väärtuse. Ruutfunktsiooni teist tuletist on lihtne leida.

1.2.2 Diferentsiaalvõrrandite lahendamine

Eelmainitud punktihulga jaoks koostatud diferentsiaalvõrrandsüsteemi saab lahendada numbriliselt. Selleks saab tähistada muutujad x_1, \dots, x_n , kus n on süsteemi kõikide parameetrite arv (tippude arv korda iga tipu parameetrite arv). Sel juhul

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, \dots, x_n)\end{aligned}$$

Euleri meetodiga lahendamisel on asendatud võrrandites diferentsiaalid lõplike muutudega ja korrutatud ajamuuduga läbi.

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \Delta t \\ &\dots \\ \Delta x_n &= f_n(x_1, \dots, x_n) \Delta t\end{aligned}$$

Teades kõigi parameetrite väärtusi mingil alghetkel t_0 , on võimalik leida parameetrite ligikaudsed väärtused ajahetkel $t_0 + \Delta t$ ja sellest omakorda iteratiivselt $t_0 + 2\Delta t \dots$ Seega valides algtingimused on põhimõtteliselt võimalik leida mistahes ajahetkel parameetrite

väärtused. Mida väiksem on Δt , seda täpsem on tulemus (Knaust, 1996).

Uurimistöös kasutatakse Euleri meetodi edasiarendust – Runge-Kutta neljandat järku meetodit, mis üldiselt annab samade ajamuutude korral palju täpsema tulemuse (Mattews, Fink: 489-491).

1.3 Lähtevõrrandite lahendamine

1.3.1 Fermi gaasi tiheduse ja rõhu vaheline seos

Fermi gaasi rõhu saab arvutada selle tihedusest seose abil

$$p = \frac{\pi^3 \hbar^2}{15 m} \left(\frac{3n}{\pi} \right)^{5/3}$$

kus p on rõhk gaasi taustsüsteemis, \hbar on redutseeritud Plancki konstant, m on elektroni mass ja n on elektronide arvtihedus gaasi taustsüsteemis (Branson, 2013). Gaasi masstihedus on võrdeline selle arvtihedusega, mistõttu eelnevast võrrandist $p \propto n^{5/3} \propto \rho^{5/3}$. Võrdetegurit p ja $\rho^{5/3}$ vahel tähistatakse edaspidi tähega k .

1.3.2 Olekuvõrrandi lahendamine

Järgnevalt on autor tuletanud võrrandid pinge-energia tensori pingekomponentide arvutamiseks massi- ja impulsi- ja tiheduse kaudu. Selles osas kasutatakse mõnedes võrrandites ülaindekseid tensori komponentide jaoks, teistes astendamise jaoks, ent mitte läbisegi samas võrrandis. Alustatakse ideaalse voolise olekuvõrrandist (Hirata 2011):

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + p\eta^{\mu\nu}$$

Lahendamiseks jagatakse see võrrandsüsteem kaheks osaks: esimene saadakse, asendades sisse $\mu = \nu = 0$. Tähistades mass-energia tiheduse $E = T^{00}$ ja Lorentzi faktori $u^0 = \gamma$ ning teades, et $\eta^{00} = -1$ saadakse (kus järeldumismärgist vasakul pool olevas võrrandis kasutatakse ülaindekseid tensorite komponentide jaoks, paremal pool astendamise jaoks)

$$T^{00} = (\rho + p)u^0 u^0 + p\eta^{00} \Rightarrow E = (\rho + p)\gamma^2 - p$$

Teise võrrandi saamiseks pannakse kõigepealt kirja võrrandsüsteemi, kus kõigis võrrandites $\mu = 0$, aga ν muutub 1-st 3-ni. Sel juhul $\eta^{0\nu} = 0$.

$$\begin{aligned}T^{01} &= (\rho + p)u^0 u^1 + p\eta^{01} = (\rho + p)u^0 u^1 \\T^{02} &= (\rho + p)u^0 u^2 + p\eta^{02} = (\rho + p)u^0 u^2 \\T^{03} &= (\rho + p)u^0 u^3 + p\eta^{03} = (\rho + p)u^0 u^3\end{aligned}$$

Võttes kõik võrrandid ruutu ja liites need kokku ning teades, et nelikiiruse pikkuse ruut on alati $-1 = -u^0 u^0 + u^1 u^1 + u^2 u^2 + u^3 u^3$ (Dunsby, 1996), saadakse:

$$T^{01}T^{01} + T^{02}T^{02} + T^{03}T^{03} = (\rho + p)(\rho + p)u^0 u^0 (u^1 u^1 + u^2 u^2 + u^3 u^3) = (\rho + p)(\rho + p)u^0 u^0 (u^0 u^0 - 1)$$

Tähistades impulsitiheduse ruudu $P = T^{01}T^{01} + T^{02}T^{02} + T^{03}T^{03}$, saadakse teise võrrandi (nüüd ja edaspidi kasutatakse ülaindekseid astendamiseks)

$$P = (\rho + p)^2 \gamma^2 (\gamma^2 - 1)$$

Avaldades esimesest võrrandist

$$\gamma^2 = \frac{E + p}{\rho + p}$$

ja asendades teise võrrandisse

$$P = (\rho + p)^2 \frac{E + p}{\rho + p} \left(\frac{E + p}{\rho + p} - 1 \right) = (\rho + p)^2 \frac{E + p}{\rho + p} \left(\frac{E + p - \rho - p}{\rho + p} \right) = (E + p)(E - \rho)$$

Fermi gaasi mudelis kehtib $p = k \rho^{5/3}$, ehk

$$P = (E + k \rho^{5/3})(E - \rho)$$

Seega on tegemist kaheksanda astme võrrandiga $\rho^{1/3}$ suhtes, mida saab lahendada Newtoni meetodiga. Sellest on lihtne leida ρ , $p = k \rho^{5/3}$ ja eelneva põhjal ka u^0 ehk γ E , p ja ρ kaudu. Nelikiiruse kogupikkuse järgi arvutatakse nelikiiruse ruumikomponentide pikkus $L = \sqrt{u^1 u^1 + u^2 u^2 + u^3 u^3} = \sqrt{u^0 u^0 - 1}$, eelnevast võrrandsüsteemist on näha, et $u^i \propto T^{0i}$, seega

$$u^i = \frac{L}{\sqrt{P}} T^{0i}$$

P definitsiooni kohaselt.

Asendades voolise olekuvõrrandisse $T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + p\eta^{\mu\nu}$ vastavad leitud suurused, saab leida pingenergia tensori kõik komponendid.

1.4 Simulatsiooni diferentsiaalvõrrandid

Iga simuleeritava punkti jaoks hoitakse meeles gaasivälja massi- ja impulsihedust ning meetrilist tensorit ja selle tuletist aja järgi.

1.4.1 Gaasi impulsi- ja masstiheduse diferentsiaalvõrrand

Kirjutades eelmainitud jäävusseaduse pikemalt välja on autor kirjutanud välja gaasivälja muutumise jaoks diferentsiaalvõrrandid

$$0 = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T_\nu^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda T_\lambda^\mu = \frac{\partial T^{0\nu}}{\partial x^0} + \frac{\partial T^{1\nu}}{\partial x^1} + \frac{\partial T^{2\nu}}{\partial x^2} + \frac{\partial T^{3\nu}}{\partial x^3} + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial T^{0\nu}}{\partial x^0} = -\frac{\partial T^{1\nu}}{\partial x^1} - \frac{\partial T^{2\nu}}{\partial x^2} - \frac{\partial T^{3\nu}}{\partial x^3} - \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T^{\lambda\nu} - \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda}$$

Paremal pool olev avaldis sõltub pingenergia tensori osatuletistest ruumikomponentide järgi, mida on võimalik peatükkide 1.2 ja 1.3 järgi arvutada. Lisaks sõltub parem pool Christoffeli sümbolist, mida on samuti võimalik arvutada meetrilise tensori osatuletiste abil. Vasak pool sisaldab pingenergia tensori massi- ja impulsiheduse komponentide tuletist aja järgi.

1.4.2 Meetrilise tensori diferentsiaalvõrrand

Lineariseeritud gravitatsioonis, kasutades harmoonilisi koordinaate, saab meetrilise tensori kohta panna kirja järgneva võrrandi (Carroll)

$$\frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial z^2} + 16\pi G (T_{bd} + T_{\alpha\gamma} \eta^{\alpha\gamma} \eta_{\beta\delta})$$

1.5 Tähe statsionaarse oleku diferentsiaalvõrrandid

Järgnevalt on autor tuletanud diferentsiaalvõrrandid, mille abil saab arvutada tähe tiheduse sõltuvust kaugusest keskpunktist. Arvutustes kasutatakse Newtoni gravitatsiooniseadust, seega võib vastus tulla vaid ligikaudne. Kuna eelduse kohaselt on tegemist statsionaarse olekuga ja gravitatsiooniväljad on võrdlemisi nõrgad, annab Newtoni mehhaanika hea lähenduse reaalsusele (Tolish: 2).

Diferentsiaalvõrrandite koostamisel eeldatakse sfäärilist sümmeetriat, ehk tihedus $\rho = \rho(r)$ on funktsioon kaugusest tähe keskpunktist. Olgu sfääri raadiusega r sisse jääva osa mass

$m(r)$. Võrrandi koostamisel vaadatakse sfääride raadiustega r ja $r+dr$ vahele jäävat kera osa, millest omakorda eraldatakse väike tükk nii, et selle ühe külje pindala on dS . Sellise tüki mass on $dm=dr dS\rho$, millele mõjuv raskusjõud on $dF=g dm=G m dr dS\rho/r^2$. Selle jõu peab tasakaalustama rõhkude erinevus

$$dp=-dF/dS=-G m\rho dr/r^2$$

Väljendades rõhu tiheduse kaudu, avaldatakse tiheduse tuletis kauguse järgi keskpunktist

$$dp=d(k\rho^{5/3})=\frac{5}{3}k\rho^{2/3}d\rho$$

$$\frac{5}{3}k\rho^{2/3}d\rho=-G m\rho dr/r^2\Rightarrow\frac{d\rho}{dr}=-\frac{3G m\rho^{1/3}}{5kr^2}$$

Võrrandi sisse jäi tundmatu m , mille leidmiseks saab omakorda koostada diferentsiaalvõrrandi. Kui sfääri raadiusega r sisse jääb mass m , jääb sfääri raadiusega $r+dr$ sisse mass $m+dm$, kus $dm=\rho S dr=4\pi\rho r^2 dr$. Seega

$$\frac{dm}{dr}=4\pi\rho r^2$$

Seda diferentsiaalvõrrandsüsteemi saab samuti lahendada Runge-Kutta neljandat järku meetodiga. Võrranditele vastavaid profiile saab vaadata peatükist 2.3.

1.6 Ääretingimused

Kuubistiku sisepiirkonnas leiduvad igale tipule igas suunas naabrid. Seega saab sisepiirkonnas arvutada osatuletisi ruumisuundades. Ent kui tipp asub äärel, ei saa teist tuletist meetrilisele tensorile arvutada sama algoritmi järgi.

Reaalsuses on aegruum lõpmatu või igatahes palju suurem kaksiktähesüsteemidest. Et lõplikul alal võimalikult realistlikult gravitatsioonivälja simuleerida, peavad ääred tekitatud gravitatsioonilaineid summutama ja mitte tagasi peegeldama.

Kuna meetrilise tensori iga komponendi teine tuletis aja järgi sõltub vaakumis vaid sellest samast komponendist ja selle ruumilisest paigutusest, saab igat komponenti vaadelda eraldi. Olgu vaadeldav komponent $w=h_{\mu\nu}$.

Liikugu positiivses x -sihis laine, mis põrkub vastu x -teljega ristuvat äärt. Siis ääretingimus peab kindlustama, et ühest küljest lainevõrrand on täidetud ja teisest küljest, et puuduks

negatiivses x-sihis liikuv laine, ehk peegeldus. Lainevõrrandi saab järgnevalt kirja panna, sest osatuletised y- ja z-sihis on võrdsed nulliga

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

Kindlustamiseks, et laine levib õiges suunas, kasutatakse w jaoks ääritingimust

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}$$

Osutub, et selline ääritingimus lahendab lainevõrrandit, sest siis kehtib seos

$$0 = \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \right) w$$

mida saab eestpoolt läbi korrutada mistahes operaatoriga, ehk

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \right) w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Seega lahendab eelnev ääritingimus võrrandit ja kindlustab, et kogu laine levib positiivses x-sihis. Samas, kui laine ei levi paralleelselt x-teljega, ei pruugi selline tingimus täielikult laine peegeldumist vältida. (Grote, 2000)

2 Simuleerimine ja andmete analüüs

2.1 Stabiliseerimismeetod

Selleks, et simulatsioon stabiilne püsiks, on sellele lisatud ka tehiskult difusioon. Difusiooni imiteerimiseks kasutatakse mitterelativistlikku võrrandit (Socolfski, Jirka 2005: 14)

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

Difusiooni abil silutakse massi- ja impulsijaotust. Mida väiksem on difusioonikonstant, seda vähem silutakse reaalseid füüsikalisi nähtusi – seda ebatäpsem see on. Järgnevates peatükkides ilmneb, et liiga väike difusioonikonstant võib põhjustada ebastabiilsust. Simulatsioonis on pikkusühikud valitud nii, et simuleeritava ala pikkus x-telje sihis oleks 1.

2.2 Katsete tehnilised andmed

Praktilise osana on sooritatud 20 simulatsiooni, eri resolutsioonidega ja eri difusioonikonstantidega. Erinevaid simulatsioone tähistatakse kahest numbrist kokku pandud lühendi abil – kõik simulatsioonid on kujul ab , kus a näitab vastavat resolutsiooni (vt tabel 1) ja b difusioonikonstanti (vt tabel 2).

Tabel 1: Simulatsiooni resolutsioon sõltuvalt a väärtusest. Z-teljega paralleelses sihis on resolutsioon väiksem, sest tähed tiirlevad X-Y tasandil.

a	X	Y	Z
1	64	64	40
2	96	96	64
3	144	144	96
4	216	216	144

Tabel 2: difusioonikonstantide väärtused sõltuvalt b ja X -telje sihilisest resolutsiooni väärtusest (tähistatakse x).

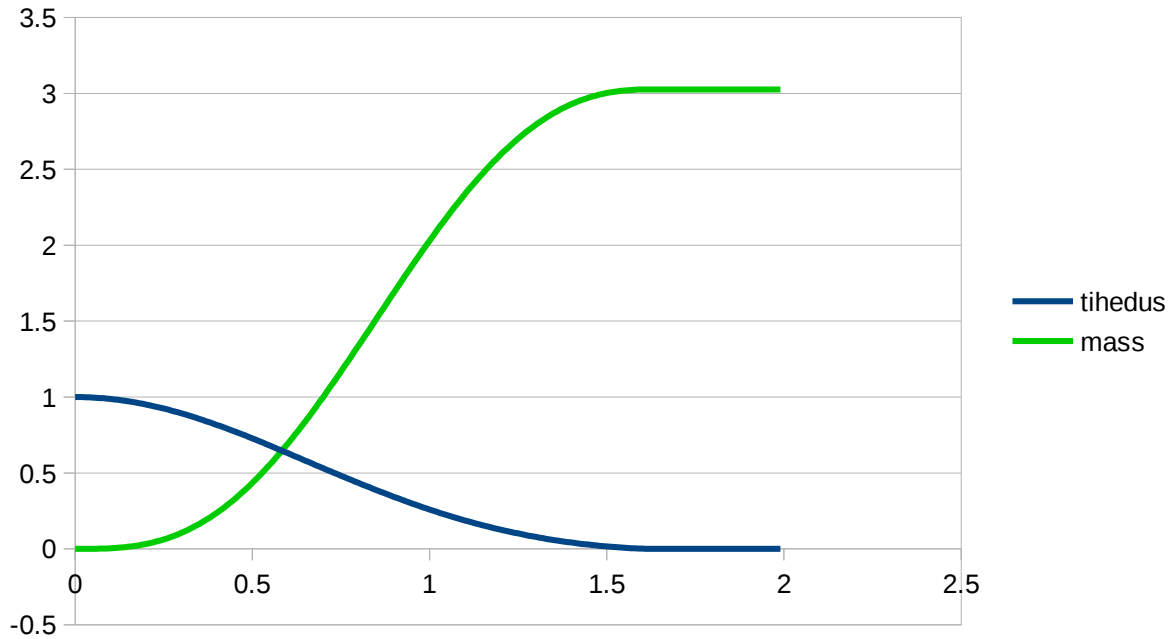
b	D - difusioonikonstant
1	$2 \cdot 10^{-4} \cdot 216/x$
2	$3 \cdot 10^{-4} \cdot 216/x$
3	$4 \cdot 10^{-4} \cdot 216/x$
4	$6 \cdot 10^{-4} \cdot 216/x$
5	$8 \cdot 10^{-4} \cdot 216/x$

2.3 Algtingimused

Simulatsiooni töötamiseks on vaja ette anda algtingimused - algne massi- ja impulsihdedus.

2.3.1 Tähe tihedusprofiil

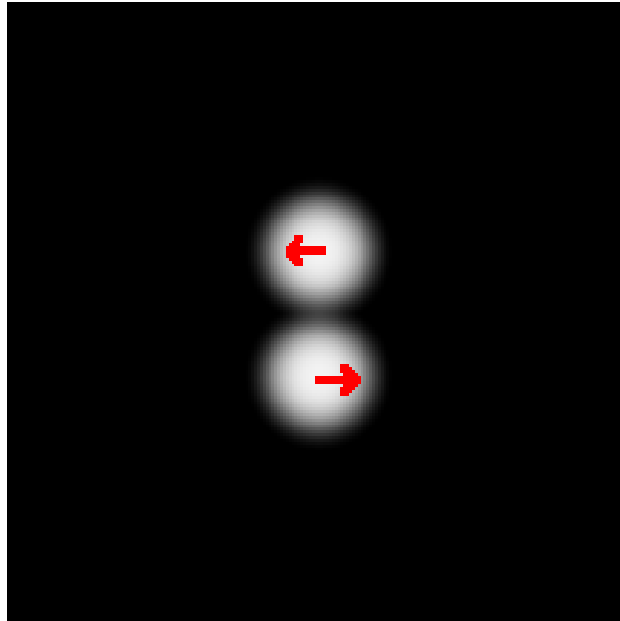
Simulatsiooni alguses tuleb määrata gaasivälja massi- ja impulsihdeduse iga kuubi keskel asuvas punktis. Selleks leitakse peatükis 1.5 esitatud diferentsiaalvõrrandsüsteemi alusel mõlema tähe tihedusprofiil, millega määratakse igas simulatsiooni punktis tiheduse. Töös on välja toodud juhtum, kus $G=k=\rho(0)=1$ (joonis 1).



Joonis 1: Arvutatud tähe tihedusprofiil $\rho(r)$ funktsioonina raadiusest ja selle raadiuse sisse jääv mass $m(r)$. Graafik on toodud ühikutes, mille korral $G=k=\rho(0)=1$. Sel juhul on tihedus ja mass arvuliselt võrreldavad.

2.3.2 Algne tähtede paigutus

Kokkupõrke stabiilsuse uurimiseks on kaks tähte pandud algselt üksteise ümber tiirlema. Et simulatsioon lõppeks piisavalt lühikese aja jooksul, pole tähtedele antud piisavalt kiirust ringorbiidil püsimiseks. Samuti, kuna ääred ei pruugi neelata gravitatsioonilaineid täielikult, on tähesüsteemi ümber jäetud lisaruumi, et tekitatud lained osaliselt peegeldudes mõjutaksid gaasi vähem (joonis 2).



Joonis 2: Algne tähtede paigutus ja liikumise suund kõigi katsete jaoks. Heledus näitab, kui palju ainet jääb kaugel vaatleja ette.

2.4 Põrkefaaside klassifikatsioon

Järgnevalt on toodud autori visuaalne klassifikatsioon erinevate faaside kohta põrkumisel. Iga faasi kohta on toodud ka näide kõrgeima resolutsiooniga simulatsioonist, mis osutus stabiilseks (näidatud on katse 44).

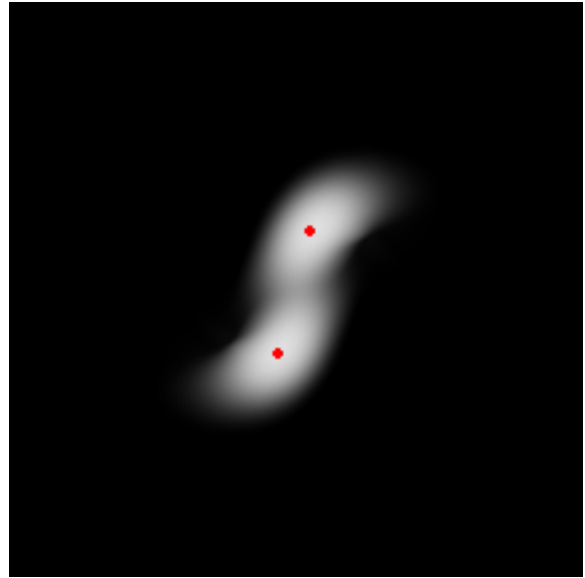
Kokku arvutati iga katse kohta 2500 võrdsete vahedega kaadrit. Nendest 50 salvestati. Edaspidi viitab kaadri järjekorranumber salvestatud kaadrite järjekorranumbrile. Selle katse pildid on toodud lisa 1.

2.4.1 Esimene faas

Deformatsioonifaasi ehk esimest faasi nimetatakse kokkupõrke etapiks, kus tähtede tihedaimad osad on veel üksteisest märgatavalt eristatavad. Sellel ajal toimub peamine tähtede deformeerumine. Deformatsiooni põhjustab peamiselt vastastähe gravitatsioonivälja sõltuvus kaugusest. Lähemal asuvaid punkte tõmmatakse tugevamalt kui kaugemal asuvaid ja see venitab tähte. Samas on ka tähele lähedal asuvatel punktidel impulss, mistõttu ei kuku lähedal asuv gaas mitte otse keskmesse, vaid kukub nõ. mööda (joonised 3, 4). Esimene faas kestab kaadrist 0 kuni ligikaudu 26.



Joonis 3: Tähed on juba märgatavalt deformeerunud, ent siiski üsna eraldatud. On selgelt märgata tähtede venimist ja „möödakukkumist”.



Joonis 4: Tähtede tihedaimad punktid on üsna kaugel (need on tähistatud). Süsteem läheb varsti üle teise faasi.

2.4.2 Teine faas

Mingil hetkel moodustavad tihedad piirkonnad ühise tuuma, millel on külje pealt vaadates ligikaudu ringjoone kujuline äär. Esialgu ei pruugi tuum veel omada silindrilist sümmeetriat – tuuma sees võivad tihedaimad piirkonnad veel eristuda. Tuumast jäävad esialgu järgi mahajäänud sabad, mis pole veel jõudnud tuumaga ühineda (joonised 5, 6). Impulssmomendi jäävusest järeldub, et selline tuum pöörleb kiiresti. Teise faasi lõpp on subjektiivne, sest pole selge, millal sabad kustuvad. Ligikaudselt toimub see kaadril 40.



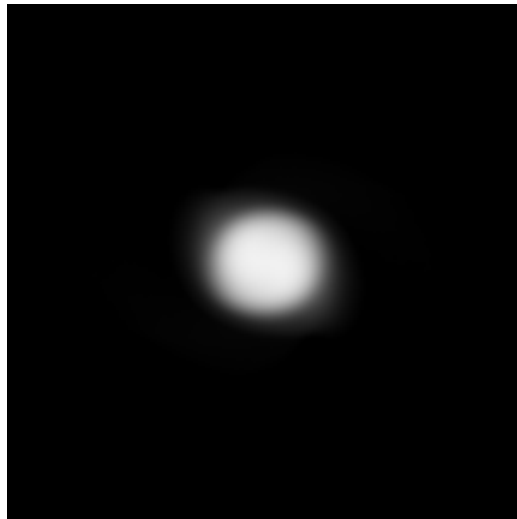
Joonis 5: Ühine tuum on selgelt näha.



Joonis 6: Tuum on mõnevõrra ühtlustunud, ent sabad on siiski näha.

2.4.3 Kolmas faas

Kolmandas faasis on ühine tuum ühtlustunud, kuigi see võib veel olla veidi lopergune. Tähe ümber tekib uus väikese tihedusega pilv (joonis 7). On märkimisväärne, et tegu ei ole allesjäänud sabadega. Pilve tekkimist on võimalik jälgida simulatsiooni kaadriseeriast (vt lisa 1).



Joonis 7: Täht on veidi lopergune. Samuti on näha tähe ümber tekkinud väikese tihedusega pilve.

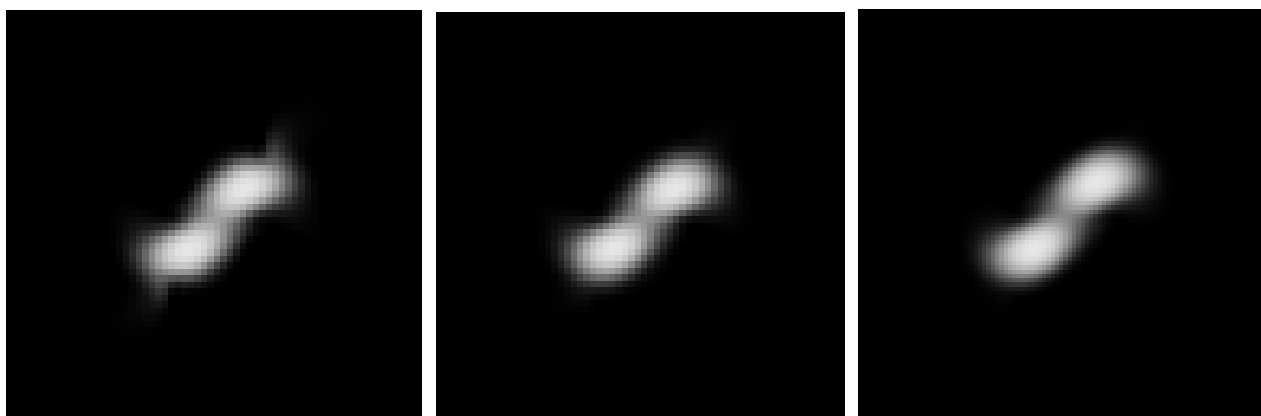
2.5 Ebastabiilsusnähtuste klassifitseerimine raskusastme järgi

Sooritatud 20 katset saab jagada kahte ossa – õnnestunud ja ebaõnnestunud katseteks. Õnnestunud katsed on need, mis lõppesid ilma, et neis oleks märgata simulatsiooni ebastabiilsusest tingitud nähtusi. Ebaõnnestunud katseteks nimetatakse neid, kus on näha selgelt ebafüüsikalisi nähusi.

2.5.1 Ebafüüsikalised nähtused

Osades katsetes oli märgata nähtuseid, mida polnud ei kõrgema difusioonikonstandiga ja sama resolutsiooniga katsetes, ega ka kõrgema resolutsiooniga, ent sarnase difusioonikonstandiga katsetes. Nähtuste ebafüüsikalise põhjendabki nende puudumine analoogsetes, kuid kõrgema resolutsiooniga ehk täpsemates katsetes.

Näiteks esines mitmetes katsetes esimese faasi jooksul ebafüüsikalist gaasi eraldumist. Seda esines näiteks katses 13 (joonis 8), ent suurema difusioonikonstandiga katses 14, ega kõrgema resolutsiooniga katses 24 ei esinenud (joonised 9, 10), kusjuures viimasel on täpselt sama difusioonikonstant nagu katses 13.



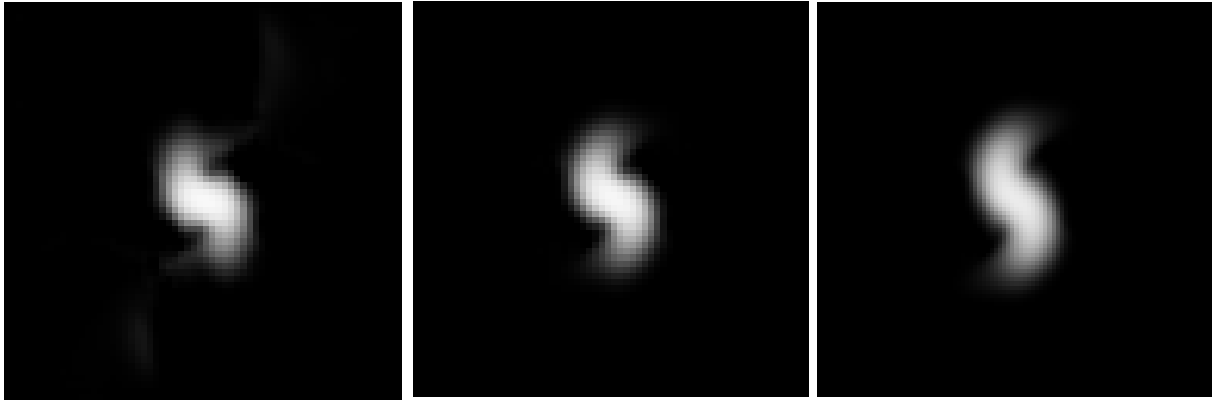
Joonis 8: Katses 13 on selgelt

Joonis 9: Katse 14.

Joonis 10: Katse 24.

näha gaasipilvedest eralduvat väiksemat pilve.

Sellised ebafüüsikalised nähtused võivad mõjutada simulatsiooni edasist käiku. Joonistel 11, 12 ja 13 on toodud samad katsed, ent simulatsiooni hilisematel hetkedel. Samas võib simulatsioon siiski lõpetada töö normaalselt. Lisas 1 on toodud näide ebafüüsikaliste nähtustega simulatsioonist.



Joonis 11: Katse 13. Tähtede

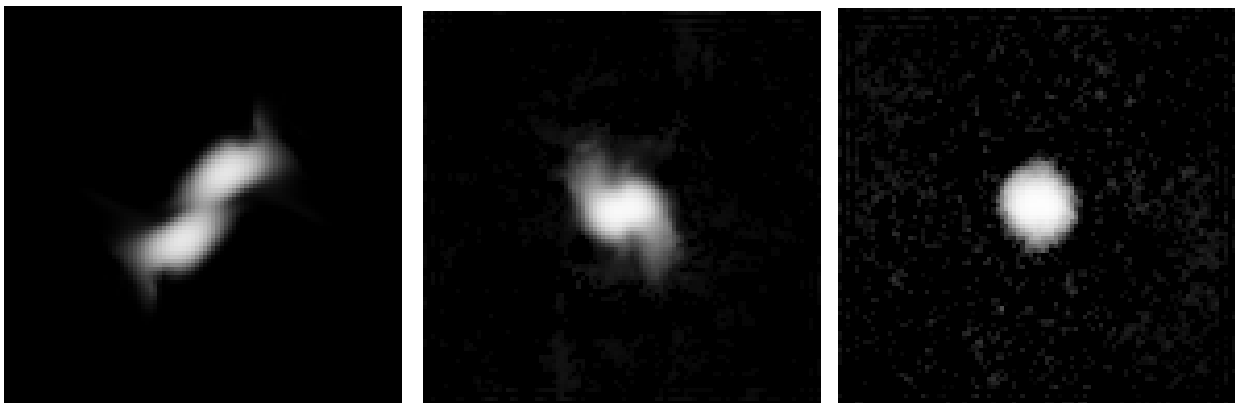
Joonis 12: Katse 14.

Joonis 13: Katse 24.

sabad on veidi hävinud väljanägemisega.

2.5.2 Programmi kokkujooksmine

Teatud juhtudel hakkavad aga ebastabiilsed nähtused kasvama, mille tagajärjel jookseb lõpuks autori programm kokku. Näiteks jooksis katse 22 kokku alles kolmandas faasis, kuigi ebafüüsikalisi nähtusi esines juba esimeses faasis (joonised 14, 15, 16). Kokkujooksmist põhjustab liiga suure absoluutväärtusega arvudega arvutamine, mis jäävad arvuti arvutuspiirkonnast välja ehk mingite simulatsiooniparameetrite liiga suureks kasvamine ebastabiilsusnähtuste tõttu. Kokkujooksmise kohta on toodud pildiseeria lisas 1.



Joonis 14: Katse 22. Esimene faas. Sabadest eralduvad tükid.

Joonis 15: Katse 22. Teine faas.

Joonis 16: Katse 22. Kolmas faas, vahetult enne programmi kokkujooksmist.

2.6 Resolutsioonide stabiilsusvõrdlus

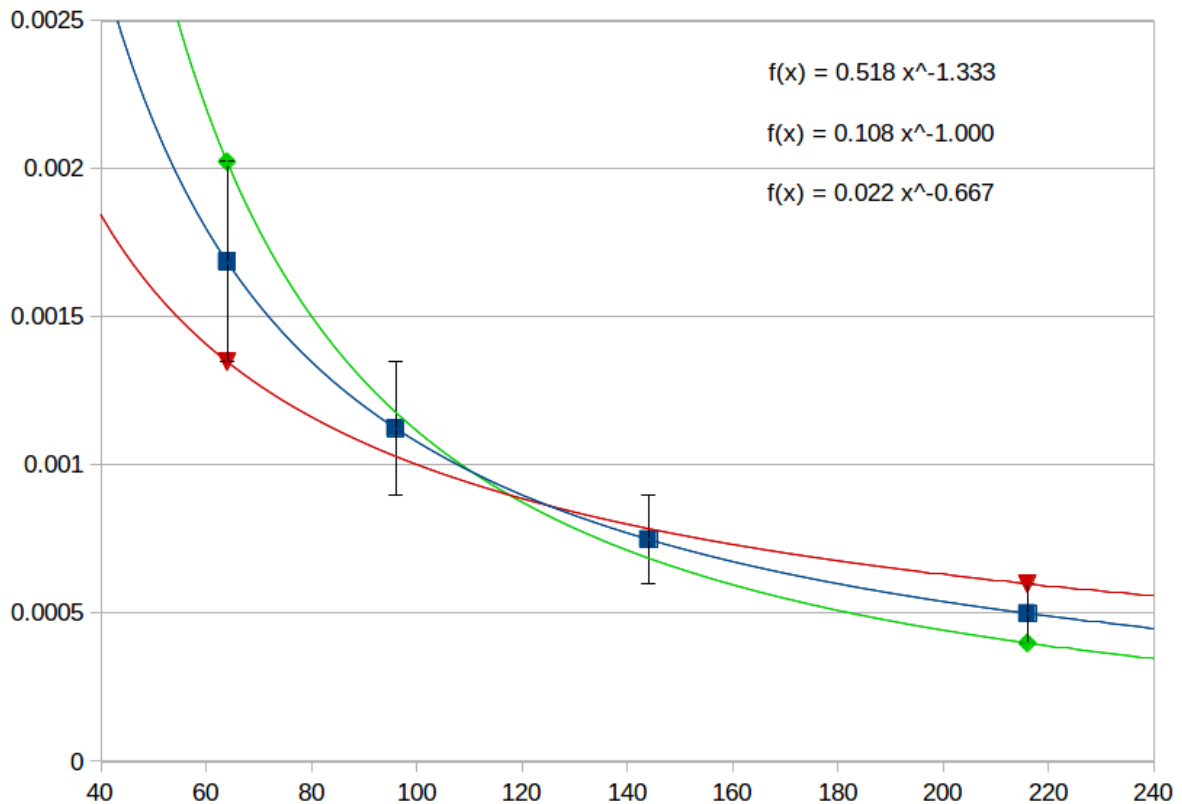
Järgnevalt on autor klassifitseerinud katsed stabiilsuse järgi. On selgelt märgata, et nii resolutsiooni tõstmine kui difusiooni suurendamine parandavad simulatsiooni stabiilsust (vt tabel 3). Tabelist tehtavad järeldused ei pruugi kehtida teiste simuleerimismeetodite jaoks.

Tabel 3: Katsete klassifitseerimine stabiilsuse järgi. Igas veerus kasutatakse läbivalt sama resolutsiooni. Igale katsele vastab eraldi lahter, milles on toodud kasutatud difusioonikonstant. Katsed on paigutatud nii, et a on tabeli veeru number ja b rea number lahutada üks. Kui katse lahtris pole täрни, siis katse õnnestus. Üks tärn tähistab ebafüüsikaliste nähtuste esinemist, kaks täрни simulatsiooni kokkujooksmist. Kokkujooksmise korral on näidatud ka viimase salvestatud kaadri järjekorranumber enne kokkujooksmist.

64x64x40	96x96x64	144x144x96	216x216x144
0.000675** (35)	0.00045** (24)	0.0003** (14)	0.0002** (10)
0.0010125*	0.000675** (36)	0.00045** (16)	0.0003** (13)
0.00135*	0.0009*	0.0006** (40)	0.0004** (23)
0.002025	0.00135	0.0009	0.0006
0.0027	0.0018	0.0012	0.0008

2.6.1 Simulatsiooni õnnestumise ja ebafüüsikaliste nähtuste esinemise vahelise piirjuhtumi leidmine

Järgnevalt on tabeli 3 alusel leitud difusioonikonstandi alam- ja ülempiirid ebafüüsikaliste nähtuste esinemise ja mitteeesinemise vahelise piirjuhtumi kohta. Osutub, et alam- ja ülempiiri vaheliste keskvaartuste graafik on pöördvõrdeline, kui joonistada see difusiooni/x-suunalise resolutsiooni teljestikule (joonis 17). Samas on leitud ka alam- ja ülempiirid astmenäitajate jaoks. Arvestades mõõtemääramatust, on graafik $D \propto X^{-1 \pm 1/3}$. Kui eeldada, et astmenäitaja tuleb täisarvuline, ehk -1 , mõjutab simulatsiooni õnnestumist vaid resolutsiooni ja difusioonikonstandi korrutis. Sel juhul on piirjuhtumiks $D \approx 0.1/X$, ehk $DX \approx 0.1$, kus D ja X on difusioonikonstant ja resolutsioon x-telje suunas. Tegemist on vaid ligikaudse kriteeriumiga, sest see sõltub konkreetsetest algtingimustest ja gaasi mudelist.

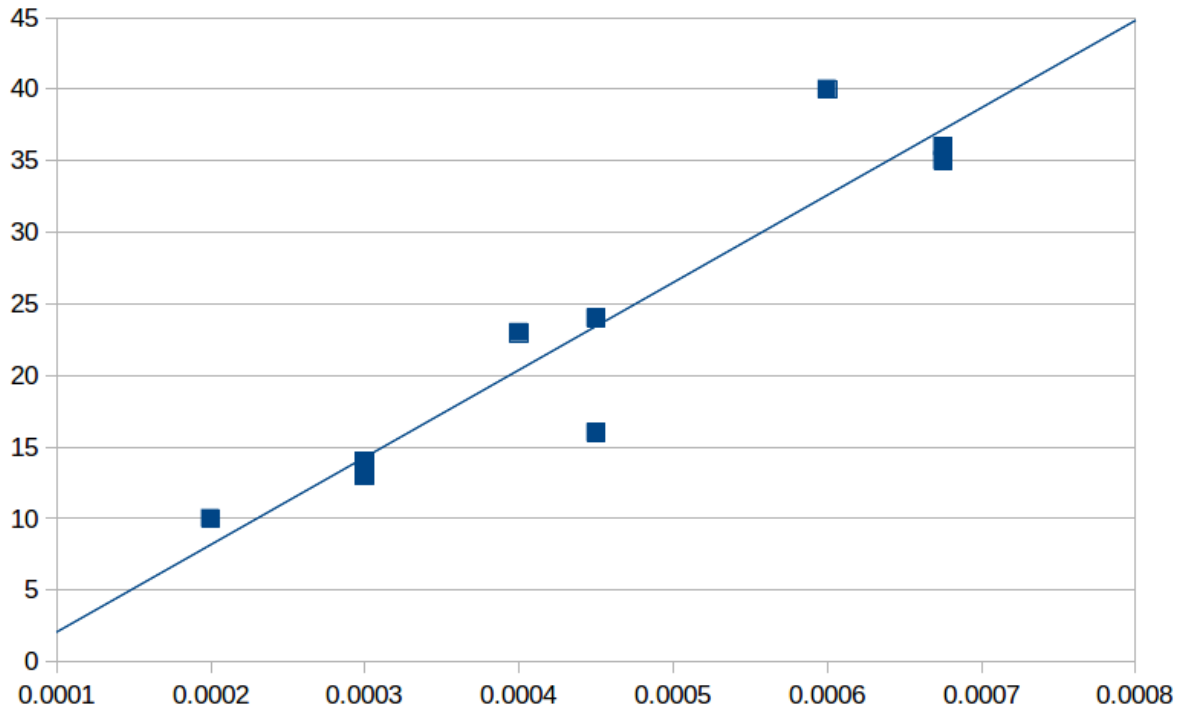


Joonis 17: Difusioonikonstant ja x -telje suunaline resolutsioon. Sinisega on näidatud stabiilsuse ja ebastabiilsuse vahelise piiri keskvärtus. Keskvärtuse graafik on pöördvõrdeline. Joonisel on toodud ka minimaalse ja maksimaalse võimaliku astmenäitajaga graafikud.

2.6.2 Kokkujooksmise hetke ja difusioonikonstandi vaheline seos

Tabeli 3 puhul saab tähele panna, et programmi kokkujooksmise hetke mõjutab peamiselt vaid difusioonikonstant, aga mitte eriti resolutsioon. Tõepoolest, katsed 11 ja 22 jooksevad kokku umbes samal ajal, 21 ja 43 jooksevad samuti umbes samal ajal ning 31 ja 42 samuti. Ainsa suurema erandina paistab välja 32, mis jookseb kokku täiest teisest ajal, kui 21 ja 43.

Kui paigutada graafikule difusioonikonstandi ja simulatsiooni kokkujooksmiseks kuluva aja, selgub, et see järgib ligikaudu lineaarset seost (joonis 18).



Joonis 18: Difusioonikonstandi ja kokkujooksmiseks kuluva aja vaheline seos salvestatud kaadrite järgi. Kuigi lineaarne seos pole täpne, paistab, et see siiski kirjeldab ligikaudselt olukorda. Simulatsiooni kokkujooksmisel ei paista olema erilist seost kokkupõrke faasiga.

Kokkuvõte

Töö jaoks sooritati autori programmeeritud simulaatoril rida samade algtingimustega simulatsioone, milles simuleeriti kahe tähe kokkupõrget. Osad neist simulatsioonidest osutusid stabiilseks, osad mitte. Simulatsiooni stabiilsust parandasid kõrgem resolutsioon ja kõrgem difusioonikonstant.

Ebastabiilsuse raskusastme määramiseks on autor klassifitseerinud ebastabiilsed simulatsioonid kaheks – sellisteks, kus on märgata ebafüüsikalisi nähtusi ja sellisteks, kus programm jookseb kokku. Stabiilsustingimuseks, ehk simulatsiooni õnnenumise tingimuseks, võeti ebafüüsikaliste nähtuste puudumise.

Töös leiti simulatsiooni õnnestumiseks minimaalse vajaliku difusioonikonstandi sõltuvuse resolutsioonist – see tuli astmefunktsioon astendajaga $-1 \pm 1/3$. Määramatuse suuruse tõttu pole võimalik kindlalt järeldada, et see astmenäitaja on täisarvuline, ent kui seda siiski eeldada, saab simulatsiooni stabiilsust hinnata vaid difusioonikonstandi ja lineaarse resolutsiooni korrutise abil.

Simulatsiooni kokkujooksmise korral leiti aeg, mis kulus selle kokkujooksmiseks. On tähelepanuväärne, et kui simulatsioon jookseb kokku, mõjutab selleks kuluvat aega peamiselt vaid simulatsioonis kasutatav difusioonikonstant, aga mitte resolutsioon.

Autori tööd oleks võimalik jätkata, kontrollides leitud empiirilisi seoseid analüütiliselt. Samuti võiks uurida, kas tulemused kehtivad ka teiste simuleerimismeetodite korral.

Kasutatud kirjandus

- Baumann, D. Cosmology Part III Mathematical Tripos. Loetud: <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/db275/Cosmology/Lectures.pdf>, 05.04.2015
- Branson, J. (2013) Degeneracy Pressure in Stars. Loetud: http://quantummechanics.ucsd.edu/ph130a/130_notes/node204.html, 06.04.2015
- Carroll, S. Lecture Notes on General Relativity. Loetud: <http://ned.ipac.caltech.edu/level5/March01/Carroll3/Carroll6.html>, 03.03.2015
- Dunsby, P. (1996) Four-velocity, momentum and acceleration. Loetud: <http://www.mth.uct.ac.za/omei/gr/chap2/node2.html>, 16.02.2015
- Einstein, A. (1916) The Foundation of the General Theory of Relativity. Annalen der Physic.
- Errede, S. (2008) Lecture Notes 16: The Structure of Space-time. Loetud: http://web.hep.uiuc.edu/home/serrede/P436/Lecture_Notes/P436_Lect_16.pdf, 08.02.2015
- Grote, M. J. (2000) Nonreflecting Boundary Conditions for Time Dependent Wave Propagation. Zürich.
- Hirata, C. M. (2011) Lecture IV: Stress-Energy Tensor and Conservation of Energy and Momentum. Loetud: <http://www.tapir.caltech.edu/~chirata/ph236/lec04.pdf>, 28.10.2014
- Hirata, C. M. (2012) Lecture VIII: Linearized Gravity. Loetud: <http://www.tapir.caltech.edu/~chirata/ph236/lec08.pdf>, 28.10.2014
- Katz, R. (1964) An Introduction to the Special Theory of Relativity. Manhattan and Kansas: Van Nostrand Company inc.
- Knaust, H (1996) Numerical Technique: Euler's Method. Loetud: <http://www.sosmath.com/diffeq/first/numerical/numerical.html>, 09.02.2015

March, T., Stanway, E. (2012) Notes for PX436, General Relativity. Loetud: http://www2.warwick.ac.uk/fac/sci/physics/current/teach/module_home/px436/notes/students.pdf, 05.04.2015

Mathews, J. H., Fink, K., D. (2004) NUMERICAL METHODS: Using Matlab, Fourth Edition. New York: Prentice-Hall Pub. Inc.

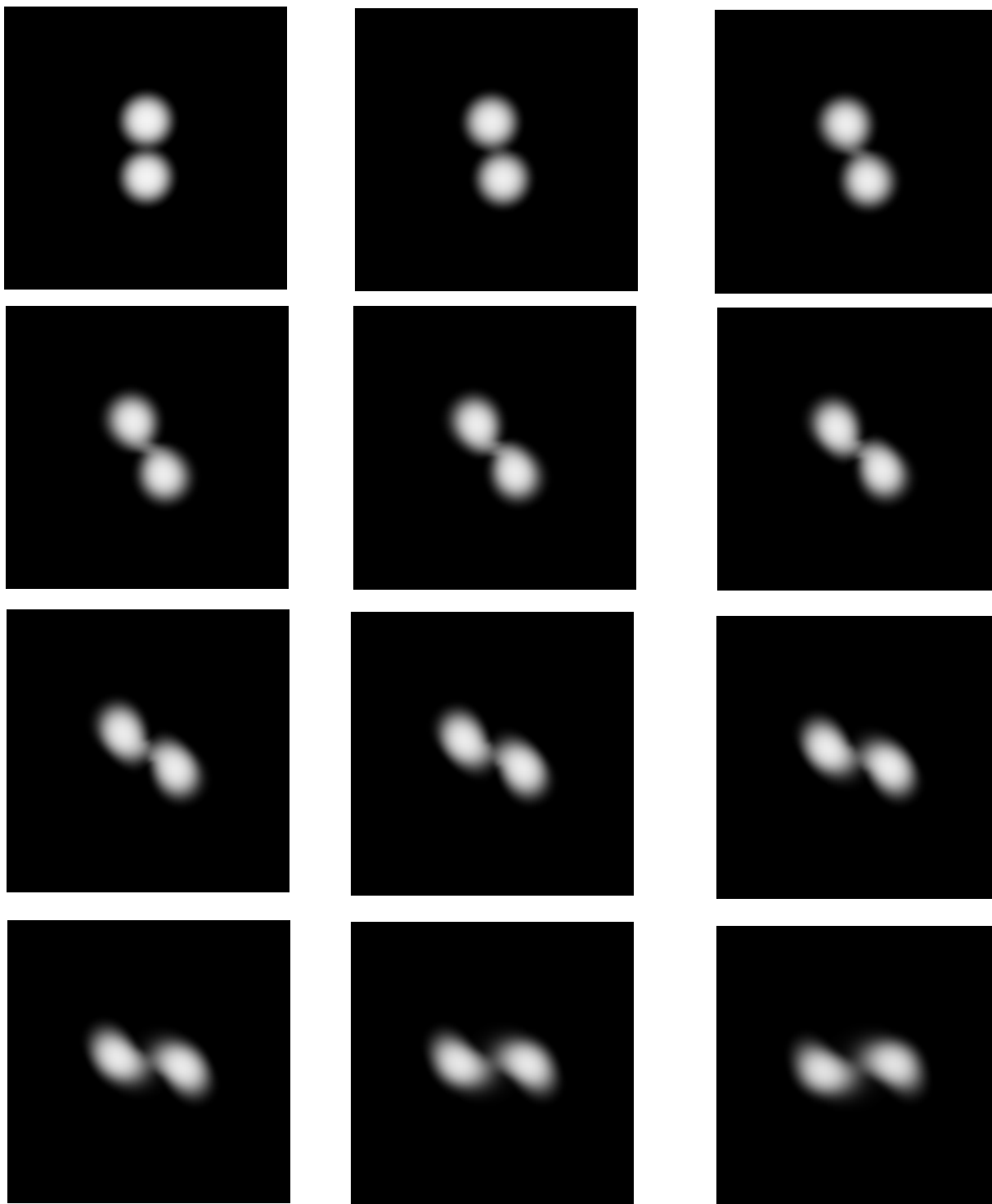
Socolfsky, S. A., Jirka, G., A. (2005) Special Topics in Mixing and Transport Processes in the Environment. Engineering – Lectures, 5th Edition. College Station: Texas A&M University.

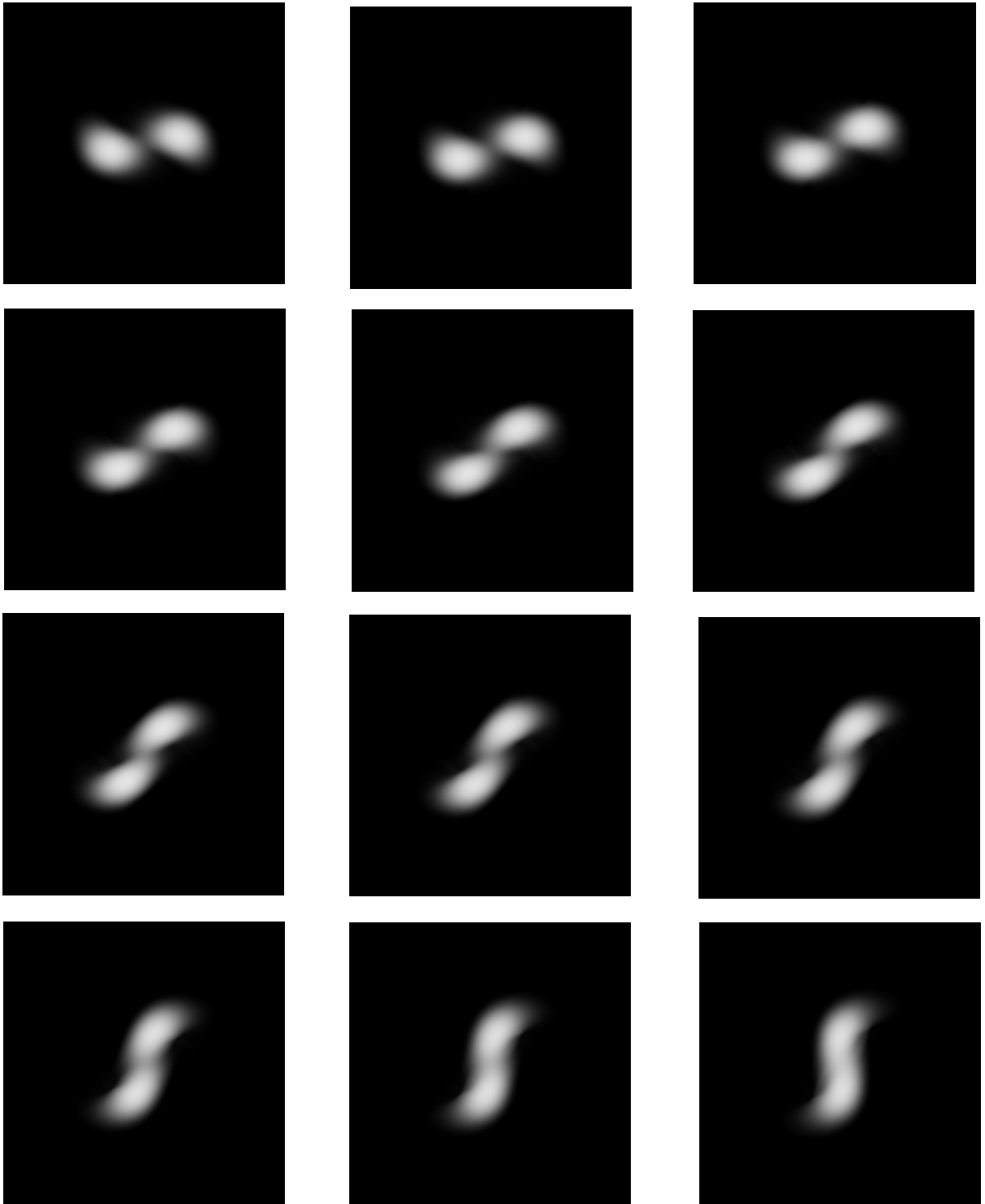
Tolish, A. General Relativity and the Newtonian Limit.

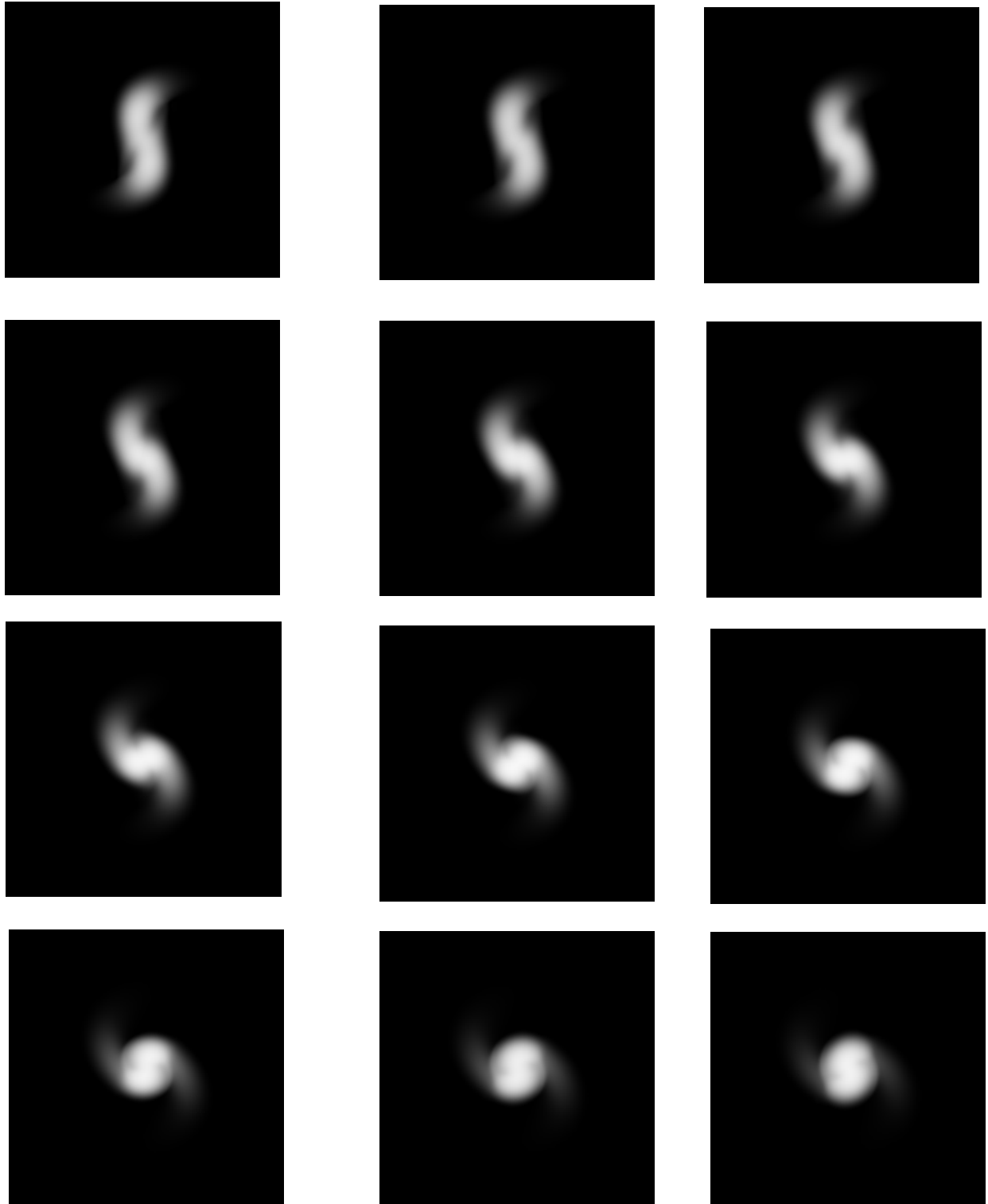
Rowland. T., Weisstein, E. W. (2015) Wolfram Mathworld.

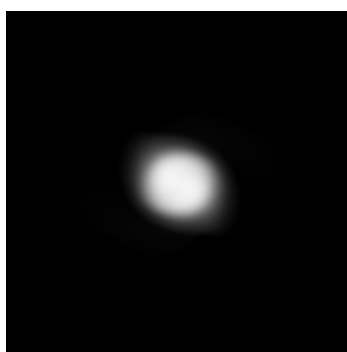
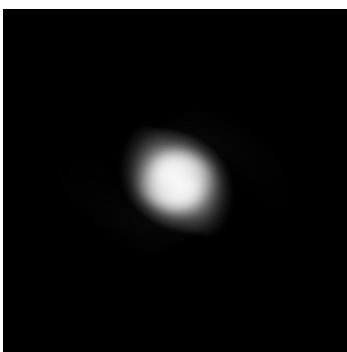
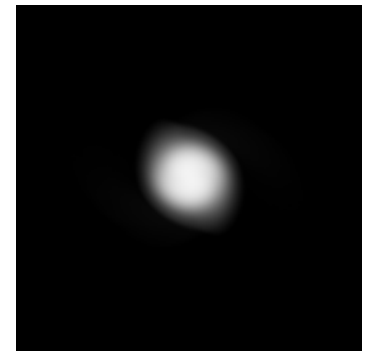
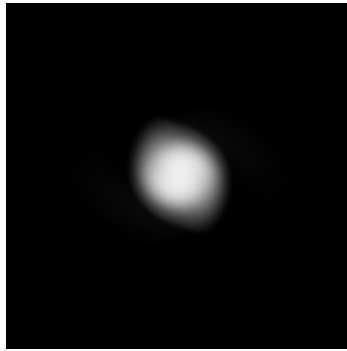
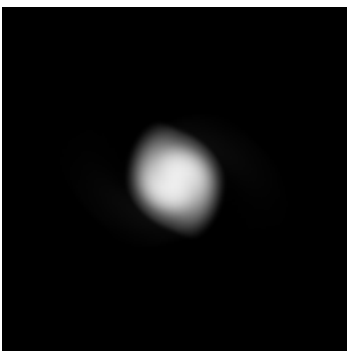
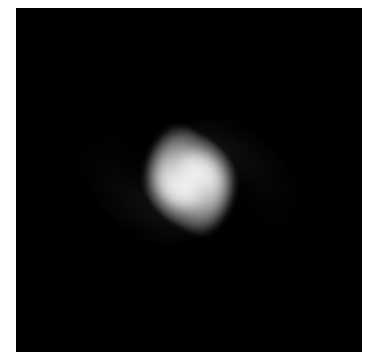
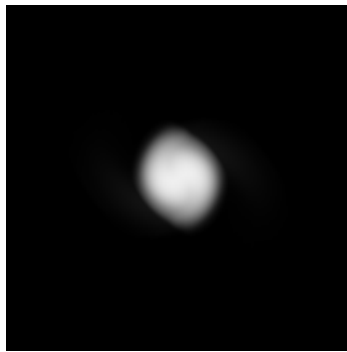
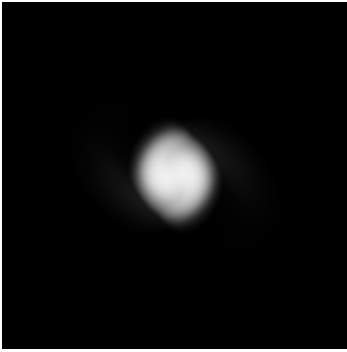
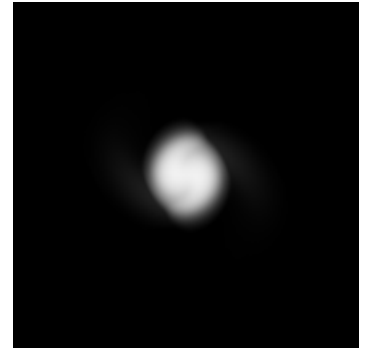
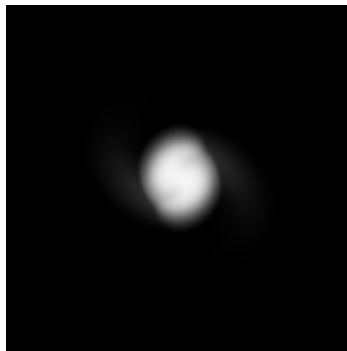
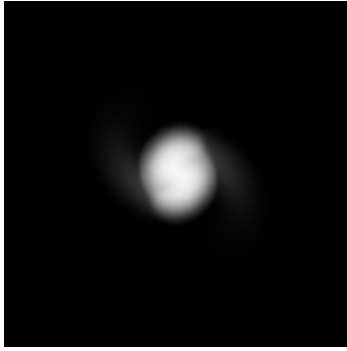
Lisa 1 Pildiseeriad simulatsioonidest

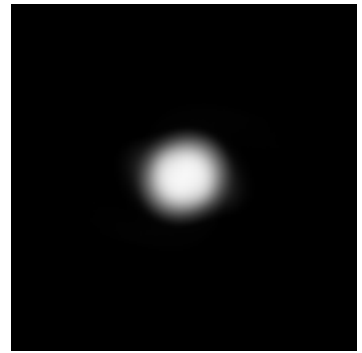
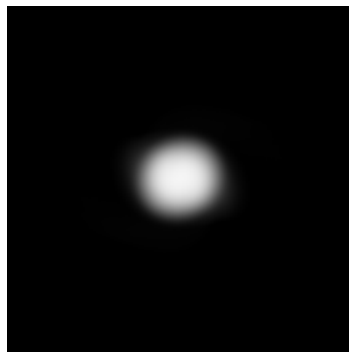
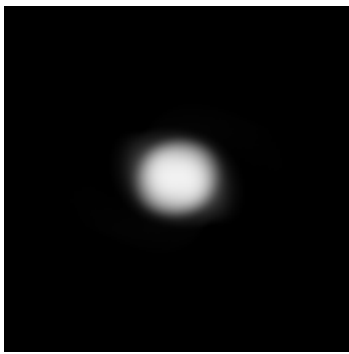
Pildiseeria õnnestunud katsest (katse 44).



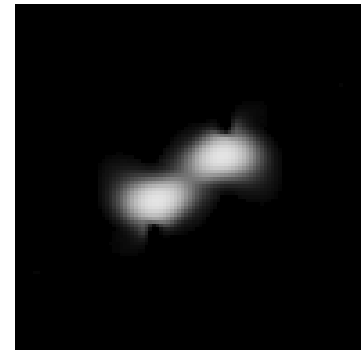
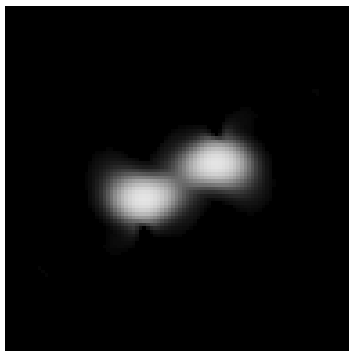
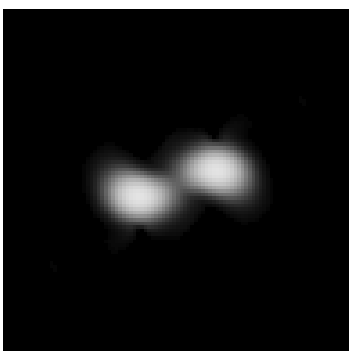
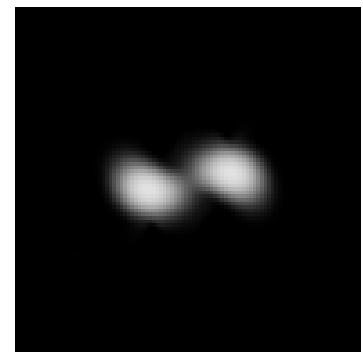
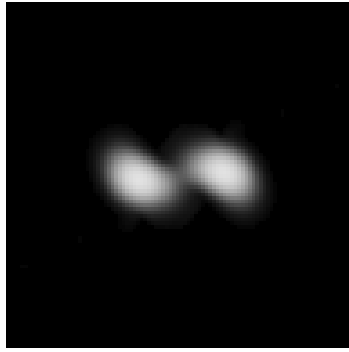
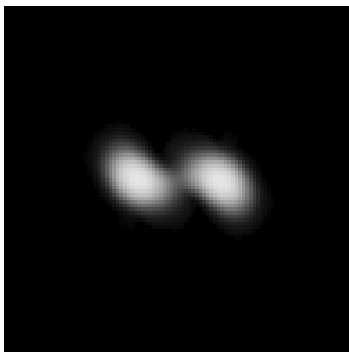
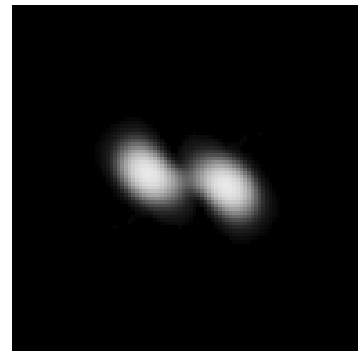
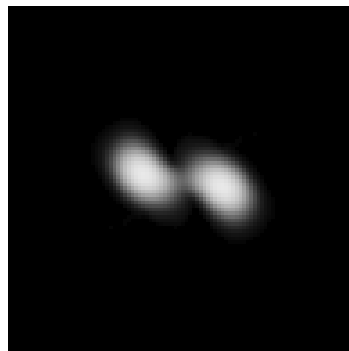
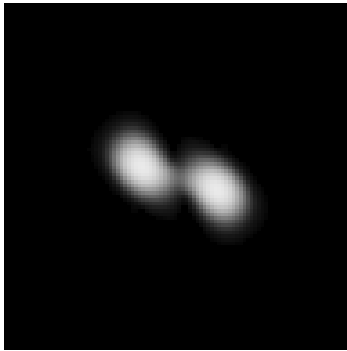


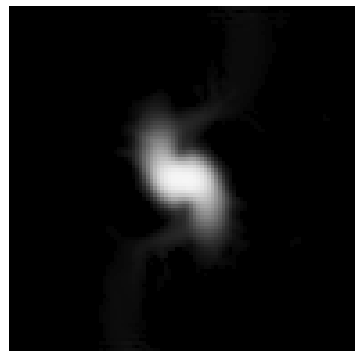
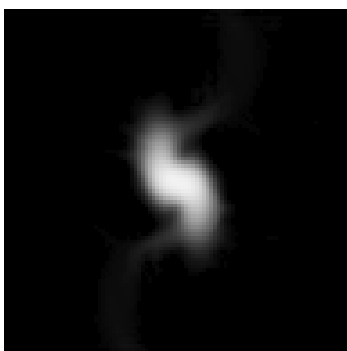
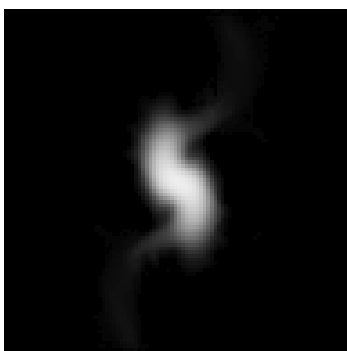
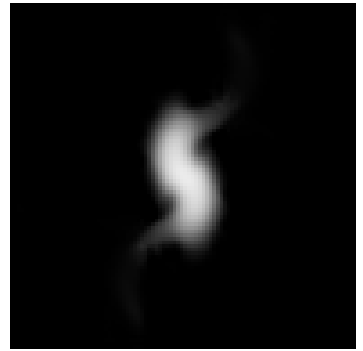
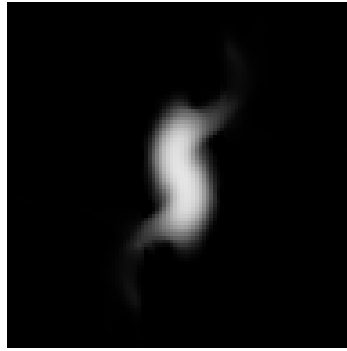
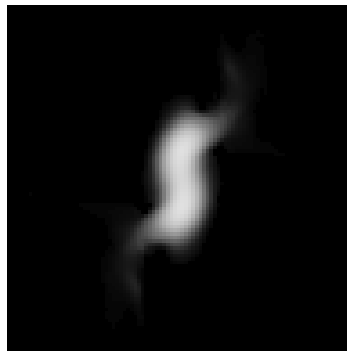
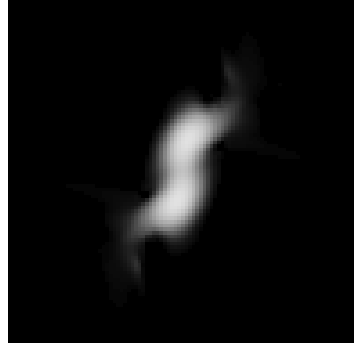
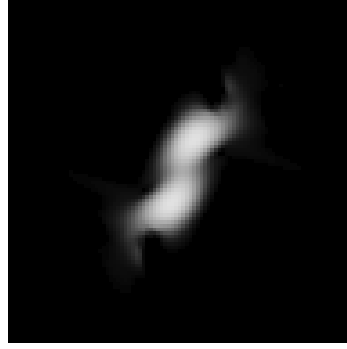
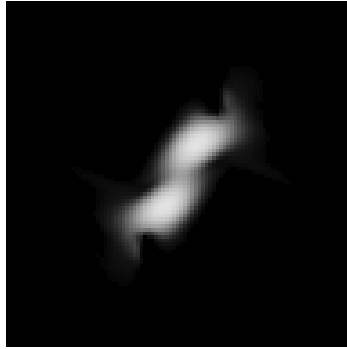
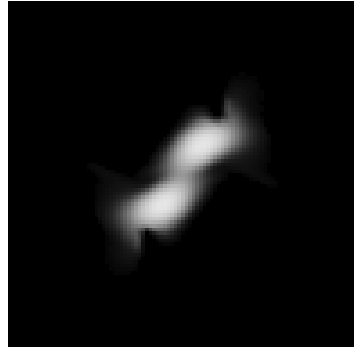
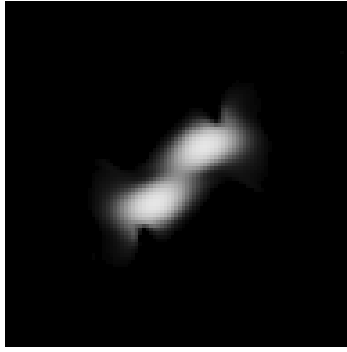
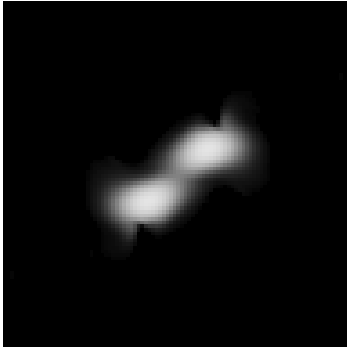


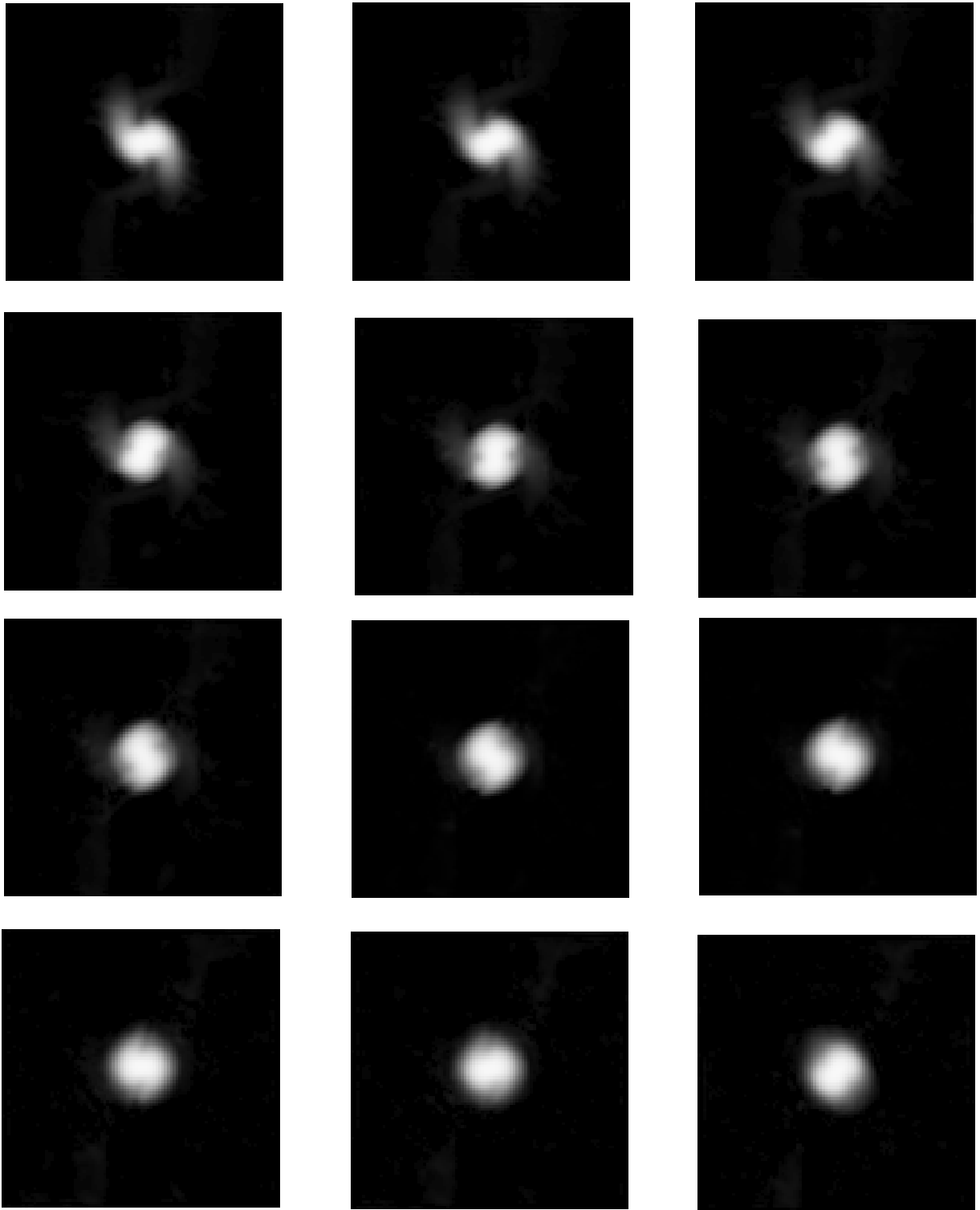




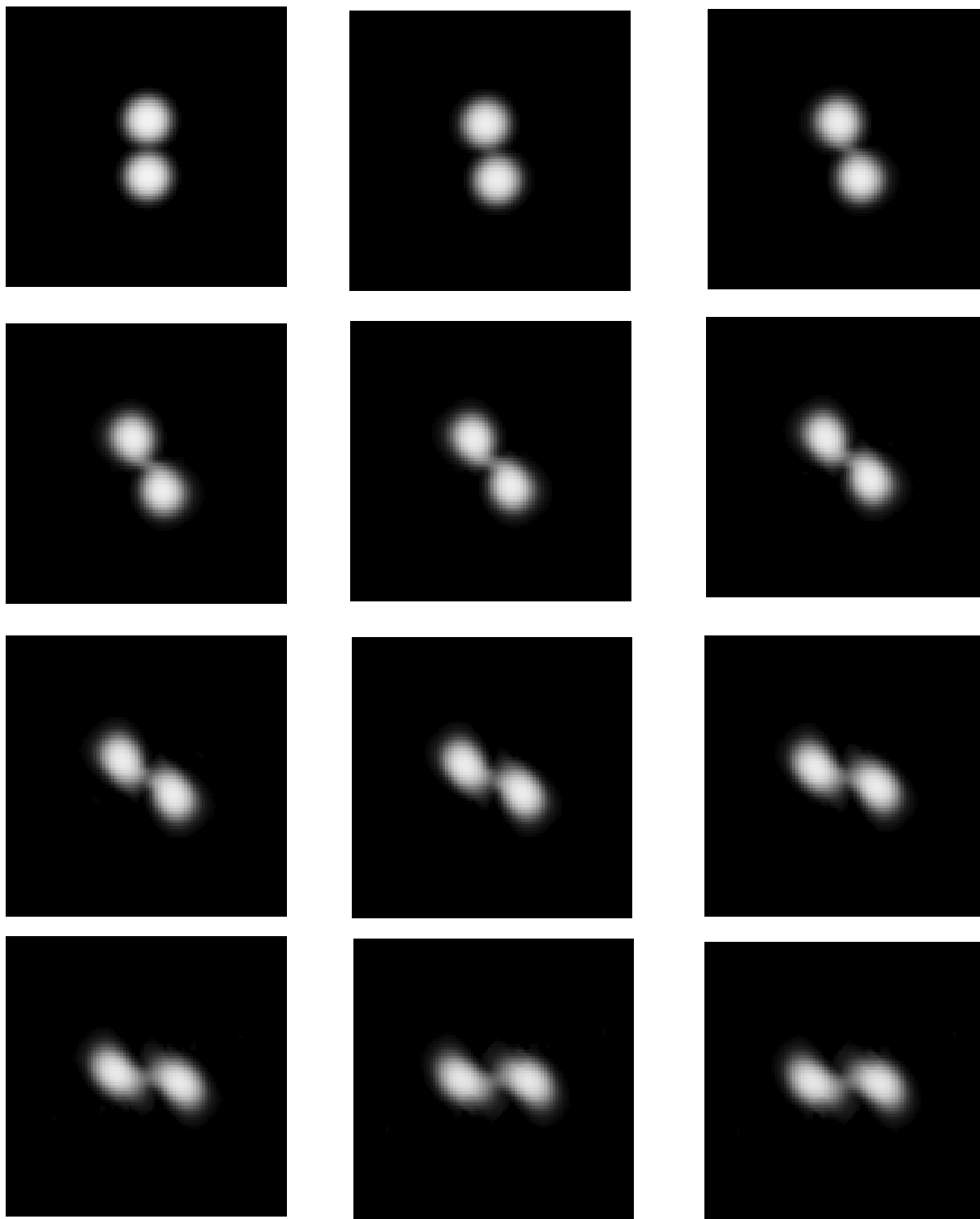
Pildiseeria ebafüüsikaliste nähtustega kokkupõrkest (katse 23, alates kaadrist 8 kuni 40).

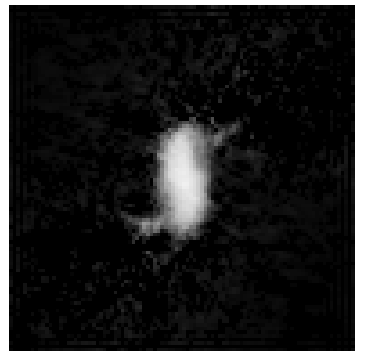
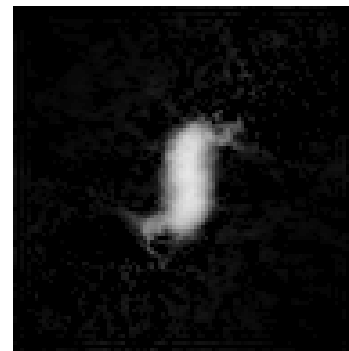
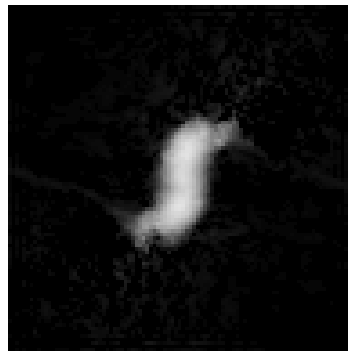
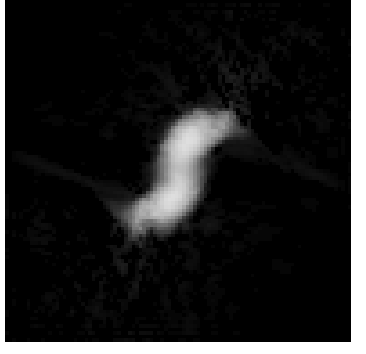
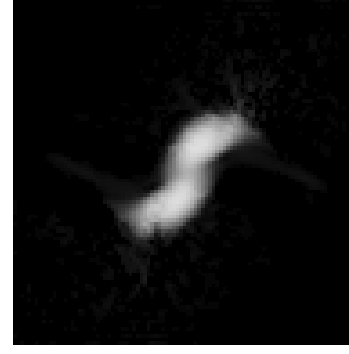
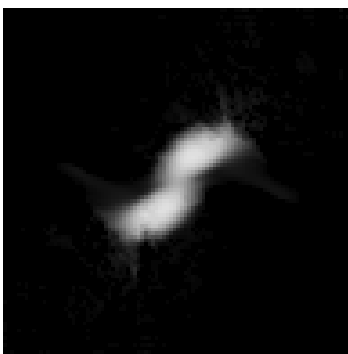
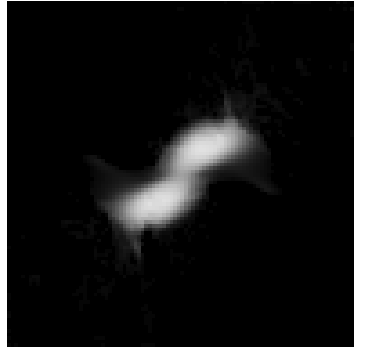
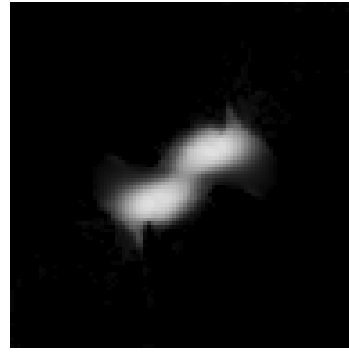
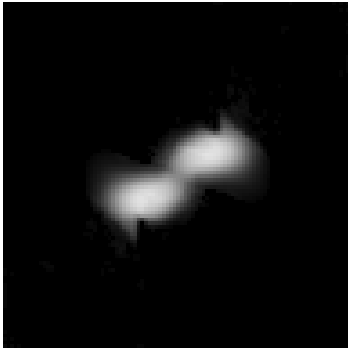
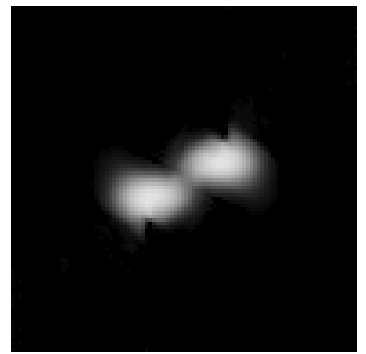
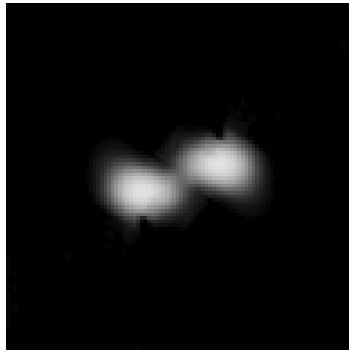
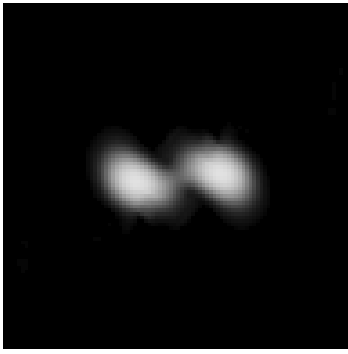


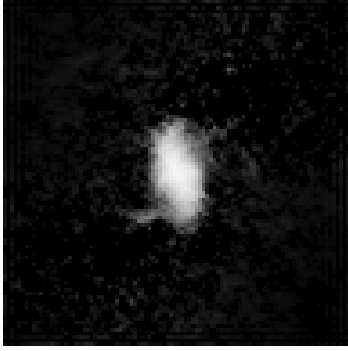




Näide kokkujooksvast simulatsioonist (katse 21, kaadrid 0 kuni 24, ehk lõpuni).







Resümees

Üldrelatiivsuse järgi kiirgab kaksiktähesüsteem gravitatsioonilisi laineid, mistõttu tähed lõpuks kokku põrkavad. Selle põrke lõppfaasi saab uurida arvutisimulatsioonide abil. Töö autor on programmeerinud simulaatori, mis on võimeline simuleerima kokkupõrget kuubistiku meetodil.

Simulaatori töö jaoks on autor tuletanud erirelativistlikud diferentsiaalvõrrandid arvutamaks gaasi impulsi- ja massitiheduse muutumise sõltuvust selle paigutusest ja gravitatsiooniväljast. On kasutatud teiste autorite diferentsiaalvõrrandeid gravitatsioonivälja muutumise simuleerimiseks lineariseeritud gravitatsioonis.

Simulatsiooni stabiilsuse uurimiseks on autor sooritanud rea numbrilisi eksperimente. Kõigis neis on kasutatud samu algtingimusi, kuid erinevaid difusioonikonstante ja resolutsioone. Osad neid katsetest õnnestusid, ehk nendes ei olnud märgata ebastabiilsusest tingitud ebafüüsikalisi nähtusi, teistes aga oli, mistõttu klassifitseeriti need ebaõnnestunuteks. Osad viimastest jooksid ka kokku tänu ebafüüsikaliste nähtuste kiirele kasvamisele. Kokkujooksmist põhjustab simulatsiooniparameetrite kasvamine arvutuspiirkonnast välja.

Katsetest tuli välja, et ilmselt määrab konkreetsete algtingimuste korral simulatsiooni stabiilsuse difusioonikonstandi ja lineaarse resolutsiooni korrutis. Samas tänu suurele määramatusele ei pruugi see seos täpne olla, ehk stabiilsuseks vajalik minimaalne difusioonikonstant ei pruugi olla täpselt pöördõrdelises seoses lineaarse resolutsiooniga. Ootamatu tulemusena selgus katsetest, et kui simulatsioon kokku jookseb, et sõltu kokkujooksmise täpne hetk eriti resolutsioonist, vaid peamiselt ainult difusioonikonstandist. Töö tulemused ei pruugi kehtida teiste simuleerimismeetodite korral.

Abstract: Simulation of the collision of binary white dwarfs using a cubic grid – stability analysis by variation of diffusion constant and resolution

According to general relativity, a system of binary stars emits gravitational radiation, gradually losing energy and finally merging. The last phase of the collision process can be studied using computer simulations. The author of this paper has created a computer program, which simulates the last phase of the merger.

In order to simulate the process, the author has derived special relativistic differential equations to compute the evolution of gas mass and momentum density in terms of the current mass and momentum distribution and the gravitational field.

To study the stability of the simulation, the author has conducted 20 test simulations, in all of which the initial conditions were the same, but resolution and diffusion constant were varied. Some of the simulations completed successfully, while others failed. A test was classified as failed, if noticeable unphysical effects were present. Failed simulations were in turn grouped by severity of failure: those in which the program did not crash and those in which the program crashed as a consequence of unbounded growth of simulation parameters.

The simulations revealed that given specific initial conditions, the stability of the simulations can be determined by the product of diffusion constant and linear resolution. On the other hand, the correlation might not be precise, as the uncertainties were substantial. As an unexpected result, if the simulation did crash, the moment of crash turned out to depend significantly only on diffusion constant, but not on resolution.